数理解析研究所講究録
641巻 1988年 127-136

不変式論に現れるあるcombinatorics

都立大 中島晴久
Haruhisa Nakajima

0. Hを代数閉体k上のaffine代数群、YをHが有理的に作用する、affine k-varietyとする。HはYの座標環$k[Y]$にk-algebra自己同型として作用するが、この作用によって不変な元の全体の作るk-subalgebraを$k[Y]^H$とかく。

(0.1) Problem. $k[Y]^H$はいつk上有限生成なalgebraか？

この問題はHilbertの才14問題の一般化された形になっているが、次が知られている。

(0.2) Popov (cf. [11]). Hがreductive $\Longleftrightarrow$ すべてのaffine H-varietyについて$k[Y]^H$が有限生成

周知の通り「$\Longrightarrow$」はkの標数が0の場合には古典的であるし、正標数のときにはMumford予想の解決から得られる([5, 6])。又、「$\Longleftarrow$」は(0.1)に対する永田先生の反例([6])の系である。一方、個別的なYについては

(0.3) Weitzenböck (cf. [6]). char(k) = 0, H = $\mathbb{G}_a$, Yが有限次元rational $\mathbb{G}_a$-moduleのときに$k[Y]^H$はk上有

限生成。

が古典的である。ところで $char(k)=0$ の場合、Seshadriが指摘しているように（[6]）、1次元巾単群 $\mathbb{G}_a$ を SL_2 の閉部分群とするときに、$\mathbb{G}_a$ の有理表現は SL_2 のそれの制限として得られる。従って (0.3) は実質的に次の結果に含まれる。

(0.4) Hochschild–Mostow–Grosshans（[4]）. G を reductive 代数群、Y を有限次元 rational G-module，H を G の parabolic 部分群の unipotent radical とするとき、$k[Y]^H$ は k 上有限生成。

reductive 代数群 G に対し、そのある極大 torus で normalize される部分群を regular な部分群という。Popov と Pommerening による次の予想は (0.4) の一般化を目指している。

(0.5) <u>Conjecture</u>. G を reductive 代数群、Y を有限次元有理 G-module，H を G の regular 部分群とする。このとき $k[Y]^H$ は k 上有限生成 ？

H の unipotent radical を考えることにより、H は unipotent な regular 部分群の場合に限定してよい。この小文では、$G=GL_n$ に関し (0.5) が実は巾単部分群 H の定める root 系の組合せ論的性質に関与しているという Pommerening の仕事 [10] を中心に紹介する。これは discrete な場合の coregular 表現の分類 [7,8] に関係のある対象でもある（実際、可約な coregular な部分群は discrete な意味での regularity を要請している）。

$Y=G$ に G は left translation で作用させる。

(0.6) Mumford. reductive 群 G の閉部分群 H について、$k[G]^H$ が k 上有限生成ならば、任意の affine G-variety Y について $k[Y]^H$ は k 上有限生成。

実際 $G\times H$ を $G\times Y$ に $(g,h)(g',y)=(hg'g^{-1}, gy)$ により作用させると $k[G\times Y]^{G\times H}\cong k[G/H\times Y]^G$ であり、$Y\ni y\mapsto(e,y)\in G\times Y$ は $k[G\times Y]^G\cong k[Y]$ をひきおこすから、$k[G/H\times Y]^G\cong k[Y]^H$。つまり、(0.6)のこの証明は、より強く、たとえば G が半単純の場合には $k[G]^H$ の生成系が構成できれば $k[Y]^H$ の生成系も構成できることを主張しており、構成的不変式論の立場からも、$k[G]^H$ の生成系の具体的構成は universal な意味をもつ。[10]では(0.5)に動機づけられているが、Rota ら[2]による straightening law を GL_n の regular な巾単部分群の不変式環へ制限し、それが成立する判定条件を巾単群の生成元のつくり出す半順序集合の言葉で記述している。

1. 集合 $\{1,\dots,n\}$ を $[1,n]$、$[1,n]\times[1,n]$ を $[1,n]^2$ で表わす。Young 図式とは $(i,j)\in\sigma$, $i'\leqq i$, $j'\leqq j \Longrightarrow (i',j')\in\sigma$ をみたすような $\mathbb{N}\times[1,n]$ の有限部分集合である。この σ を shape とする tableau T は、$T:\sigma\longrightarrow[1,n]$ なる写像でしかも、各 $(i,j),(i,j+1)\in\sigma$ について $T(i,j)<T(i,j+1)$ をみたすとする(この仮定は本質的な意味をもたない)。tableau T は

$$T=\begin{pmatrix} T(1,1), & T(1,2), & \cdots\cdots \\ T(2,1), & T(2,2), & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

のように表示され、この行及び列の概念を自然に定義できる。各列の成分が下へ向けて単調に非減少のときに、Tは標準的といわれる。又、tableau Tの各列を、その成分を並べかえることにより下へ向けて単調に非減少となるようにした新しいtableauのことをTの標準化といいT^sであらわす（これは本質的に[1]で出現）。同じYoung図式σをshapeとする2つのtableau S, Tを並べた組$(S|T)$をbitableauという。

一方root系Φは$(i,j)\in\Phi \Longrightarrow i<j$, $(i,j)\in\Phi$かつ$(j,l)\in\Phi \Longrightarrow (i,l)\in\Phi$をみたす$[1,n]^2$の部分集合とする。半順序構造を$i\succ j \Longleftrightarrow (i,j)\in\Phi$で定義された半順序集合（posetと略す）$[1,n]$を$\Omega(\Phi)$であらわす。tableau Tの各行$(i_1,\ldots,i_m)$について$(i_r,l)\in\Phi \Longrightarrow l\in\{i_{r+1},\ldots,i_m\}$をみたすとき、Tは$\Phi$-tableauといわれる。$\Phi$-tableauが、1行であれば$\Phi$-minorという。更にbitableau$(S|T)$についてはSが$\Phi$-tableauのときに$\Phi$-bitableauという。$\Phi$-tableau Tの$T^s$は$\Phi$-tableauになるとは限らない。これが常に成立するとき、root系Φは標準化条件をみたすといわれる。

card $\Omega=n$となるposet Ωの許容数量化とは$e:[1,n]\to\Omega$

なる双射で $e^{-1}:\Omega \longrightarrow [1,n]$ が逆転順序準同型となるものをいう。組 (Ω, e) は数量化されたposetといわれるが $\Phi(\Omega,e) \equiv \{(i,j)\in[1,n]^2 \mid e(i)>e(j)\}$ とおくと、これはroot系になる。$\Phi(\Omega,e)$ が標準化条件をみたすような許容数量化 e をもつとき、poset Ω は標準化条件をみたすといわれる。もちろん、このようなときでも、別の許容数量化 e' について $\Phi(\Omega, e')$ が標準化条件をみたすとは限らない。$\Omega\ni x$ について、$\Omega\langle x\rangle \equiv \{y\in\Omega \mid y<x\}$ を、x の切片という。$x,y\in\Omega$ が切片同値 $x\sim y$ であるとは $\Omega\langle x\rangle=\Omega\langle y\rangle$ をみたすことであり、$\sim$ による Ω の同値類を切片類という。明らかに

(1.1) Ω において切片同士が包含関係について比較可能ならば Ω の切片類への分割 $\Omega=M_1\cup\cdots\cup M_r$ において $x\in M_i$, $y\in M_{i+1} \Longrightarrow \Omega\langle y\rangle\subset\Omega\langle x\rangle$ となるように番号 i を各切片類 M_i につけることができる。

次の主張の[10]における証明には誤りがある。

(1.2) (Ω, e) を数量化されたposetで、$\Phi(\Omega,e)$ が標準化条件をみたすとせよ。$\Omega_i \equiv \Omega\langle e(i)\rangle$ とおくとき、$\Omega\supset\Omega_1\supseteq\cdots\supseteq\Omega_n=\emptyset$.

<u>証明</u> ある i について $\Omega_i \not\supset \Omega_{i+1}$ とする。$m\in[1,n]$ を $e(m)\in\Omega_{i+1}\setminus\Omega_i$ と定め、$\{i+2,\cdots,m-1\}\cap\Omega_i=\{j_1,\cdots,j_\ell\}$, $j_1<\cdots<j_\ell$ とする。

$$T=\begin{pmatrix} i+1 & i+2 & i+3 & \cdots & m-1 & m & \cdots & n-1 & n \\ i & j_1 & j_2 & \cdots & j_\ell & m+1 & \cdots & n & \end{pmatrix}$$

はΦ-tableauだがT^sはΦ-tableauではない。//

Ωの切片類への分割$\Omega=M_1\cup\cdots\cup M_r$に対し，$\Omega_i \equiv \Omega\langle x_i\rangle$ $(x_i\in M_i)$とおき次の2つの条件を記述する。

(*) $\Omega_i \subseteq M_{i+1}\cup\cdots\cup M_r$かつ$\Omega\supset\Omega_1\supset\cdots\supset\Omega_r=\phi$

(**) $1\le i<j<r$について$\mathrm{card}((M_{i+1}\cup\cdots\cup M_j)\setminus\Omega_i)>1 \Longrightarrow$ $M_i\ni{}^\forall x$は$M_{j+1}\cup\cdots\cup M_r$の中に順序について隣接する元をもたない。

一般にΩにおいて切片同士が比較可能ということと，(1.2)の結論部分がみたされるようなΩの許容数量化が存在することとは同値である。従って(1.1)と(1.2)から，

(1.3) Ωが標準化条件をみたすならば(*)が成立する。

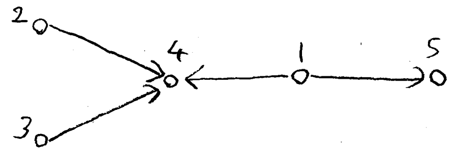
条件(*)と(**)が成立するとき，poset Ωはgoodであるといわれる。次がposetに関する[10]の主定理である。

(1.4) Theorem (cf.[10]) poset Ωについて，Ωが標準化条件をみたす$\Longleftrightarrow$ Ωはgood.

明らかに"good"の概念の方が，posetについて調べやすいので，この結果は有用である。$(x,y)\in\Omega\times\Omega$が(directed) arrow $\Longleftrightarrow$ $x>y$かつxとyとは隣接する，によってΩは(directed) graphにあらわせる。又Ωの許容数量化はその

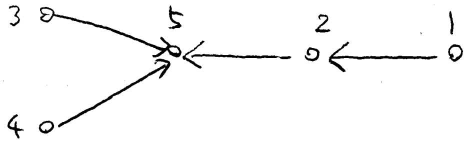
graphに1からnまでの数字を"direction"とcompatibleに書きこむことにより表示される。

例 ①



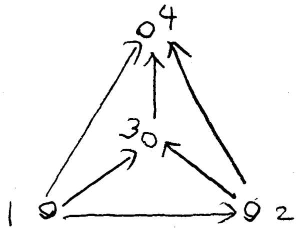
: not good

②



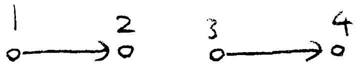
: good

③



: good

④



: not good

2. GL_n の regular な巾単部分群 U について、$k[GL_n]^U$ の k 上の生成系を構成することを考えているのであるが、$M_n = k^{n^2}$ を $n \times n$ 型 matrix のなす affine 空間とするとき $SL_n \supset U$ なので、代わりに $k[M_n]^U$ を考察すればよい。変数 $\{X_{ij}\}$ をとり $k[M_n] = k[X_{ij} \mid 1 \le i, j \le n]$ とする。bitableau $(S|T)$ の bideterminant とは $k[M_n]$ における次の多項式：

$\prod_i$ (matrix (X_{ij}) の $S(i,1), S(i,2), \cdots$ 行と $T(i,1), T(i,2), \cdots$ の列からなる小行列式)。

以下、bitableau と bideterminant とを同一視する。S, T が標準的なとき、bitableau $(S|T)$ を標準的という。次が基本的。

(2.1) Doubilet, Rota-Stein (cf. [2]). 標準的な bitableaux は $k[M_n]$ の k-basis になる。

この内容は straightening law として知られているが、[1] で更に詳しい検討がなされており、それが [10] で有用である。

root 系 Φ が straightening law をみたすとは、任意の Φ-bitableau が標準的な Φ-bitableaux の k-線形結合で表わされるときにいう。たとえば bitableau T を標準的 bitableaux の線形結合でかくとき T^s はその係数が非零の項としてあらわれる (cf. [1])。従って Φ-bitableau T が標準的な Φ-bitableaux の線形結合になっていれば、(2.1) により、T^s も Φ-bitableaux になる。実は次が成立する。

(2.2) <u>Proposition</u> (cf. [10]). root 系 Φ について、Φ が標準化条件をみたす $\Longleftrightarrow$ Φ が straightening law をみたす。

$U(\Phi)$ を次の行列 $u=(u_{ij})$ からなる GL_n の部分群とする；

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ k\text{の任意の元} & \text{if } (i,j)\in\Phi \\ 0 & \text{その他} \end{cases}.$$

$U(\Phi)$ は GL_n の regular な巾単部分群であり、この群について $k[M_n]^{U(\Phi)}$ の生成元を調べればよい。

(2.3) <u>Conjecture</u> (Pommerening). $k[M_n]^{U(\Phi)}$ は Φ-minor 達によって k 上 algebra として生成される？

この root 系 Φ から作られる poset $\Omega(\Phi)$ (cf. p4) が good

であるとき，$U(\Phi)$ も good であるという。明らかに Φ-bitableaux は $U(\Phi)$ で不変である。従って $k[M_n]^{U(\Phi)}$ が標準的な Φ-bitableaux を k-basis とするなら，Φ が straightening law をみたすことになり，(2.2)，(1.4) を用いて $U(\Phi)$ が good であることが示された。この逆も成立し，次が [10] の主定理である。

(2.4) <u>Theorem</u> (cf. [10]) root 系 Φ について $U(\Phi)$ が good $\Longleftrightarrow$ 標準的な Φ-bitableaux は $k[M_n]^{U(\Phi)}$ の k-basis。

$n \leqq 4$ では not good な poset は 1つ (p7 の ④ の例) しかない。しかもこの not good な poset から作られる巾単群の不変式環は $k[M_2]^{G_a} \otimes k[M_2]^{G_a}$ に同型であり容易 ([9])。つまり $G = GL_n$ $(n \leqq 4)$ については不変式環の生成系を原理的に構成できるという強い意味においても (0.5) は解けている。

なお (0.5) に対する全く異なる視点として Grosshans [3] が基本的かつ有用である。これは多分，Seshadri の仕事に触発されている。

REFERENCES

1. C. De Concini – D. Eisenbud – C. Procesi, Young diagrams and determinantal varieties, Invent. math. 56 (1980), 129–165.
2. P. Doubilet – G. C. Rota – J. Stein, Combinatorial methods in invariant theory, Stud. Appl. Math. 53 (1974), 185–216.

3. F. Grosshans, Observable groups and Hilbert's fourteenth problem, Amer. J. Math. 95 (1973), 229–253.

4. ——, Invariants of unipotent radicals of parabolic subgroups, Invent. Math. 73 (1983), 1–9.

5. D. Mumford, Geometric Invariant Theory, 2nd ed., Springer-Verlag, 1985.

6. M. Nagata, Lectures on the fourteenth problem of Hilbert, Tata Institute, 1965.

7. H. Nakajima, Regular rings of unipotent groups, J. Algebra 85 (1983), 253–286.

8. ——, Modular representations with free covariants, in preparation.

9. K. Pommerening, Invarianton unipotenter Gruppen, Math. Z. 176 (1981), 359–374.

10. ——, Ordered sets with the standardizing property and straightening law for algebras of invariants, Advances in Math. 63 (1987), 271–290.

11. V. L. Popov, Hilbert's theorem on invariants, Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 1318–1322.

(補足) $u^{-1}=(x_{ij}) \in U(\Psi)$ の $k[M_n]$ への action は次式で与えられる。

$$u(X_{ij}) = X_{ij} + \sum_{(i,l)\in\Psi} u_{il} X_{lj} .$$